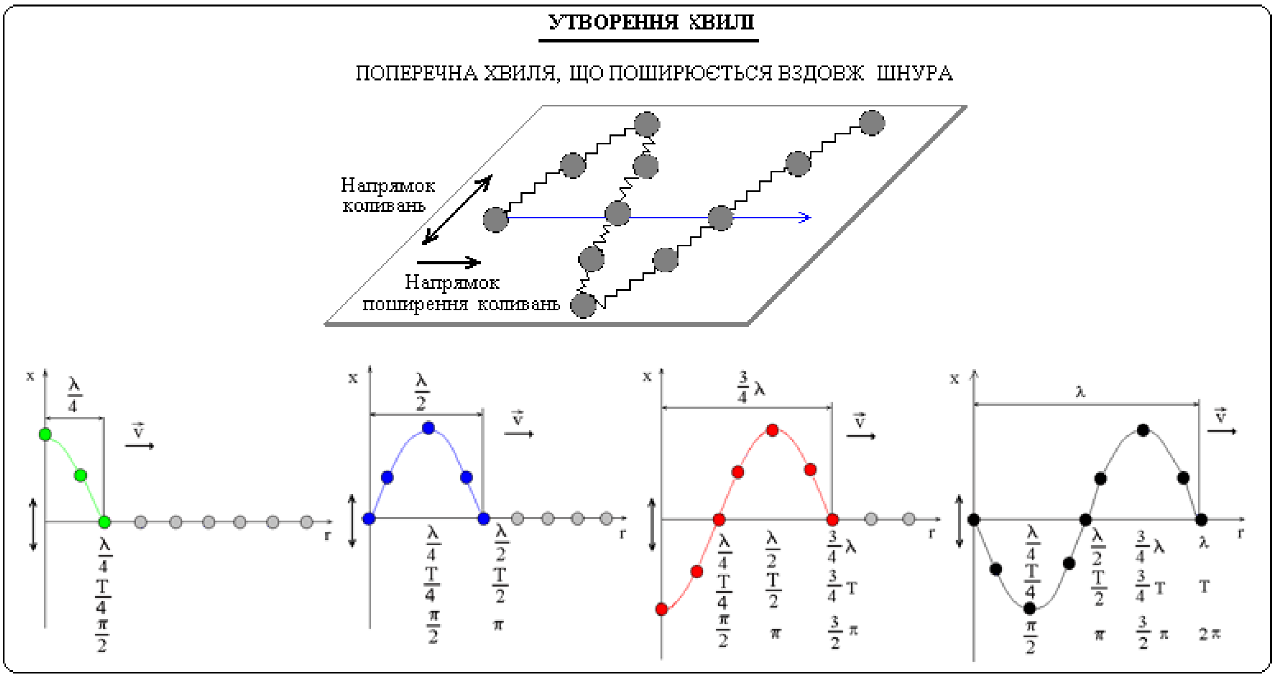
МЕХАНІЧНІ ХВИЛІ

1. Поширення коливань в пружних середовищах. Поперечні і поздовжні хвилі. Довжина хвилі. Зв'язок довжини хвилі з швидкістю її поширення та періодом (частотою)

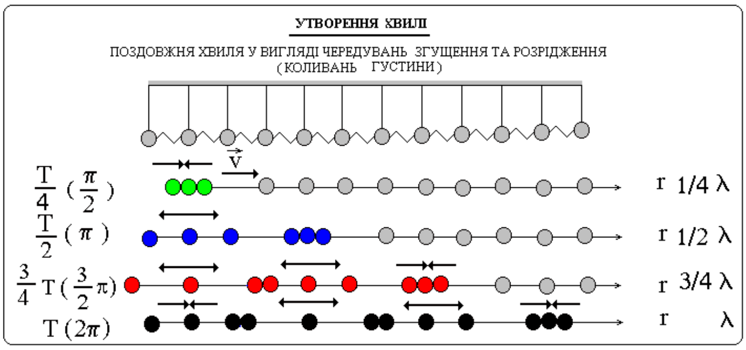
Існуванням пружних зв'язків між частинками середовища приводить до того, що коливання однієї з частинок передається сусіднім, і таким чином *механічне коливання, яке поширюються в пружному середовищі, утворює* ***механічну хвилю***.

На малюнку подана картина розподілу зміщень частинок в моделі лінійного середовища через 1/4 Т, 2/4 Т, 3/4Т та Т з моменту збудження коливань початкової частинки. Сили взаємодії моделюються пружинками. Моделюється процес утворення ***поперечної хвилі***, тобто *хвилі, коливання в якій перпендикулярні напрямку її поширення*.



В наступній, поданій нижче, моделі середовища можна розглянути процес утворення ***поздовжньої хвилі***, такої, *в якій коливання відбуваються паралельно напрямку її поширення*. В наведеному на малюнку прикладі відбуваються коливання густини (згущення змінюється розрідженням).

В процесі поширення механічної хвилі від точки до точки переноситься імпульс та енергія без переносу маси.



Відстань, яку проходить хвиля за один період хвильового коливання (Т), називається ***довжиною хвилі*** (λ).

Таким чином

$$\lambda = vT.$$

Зрозуміло, що *довжину хвилі можна означити також як відстань між найближчими точками, які коливаються в одній фазі (з однаковим зміщенням та швидкістю).*

2. Фронт хвилі. Графіки хвилі. Рівняння хвилі (рівняння хвильового зміщення)

*Геометричне місце точок (г.м.т.), які коливаються в одній фазі, називається **хвильовою поверхнею**.*

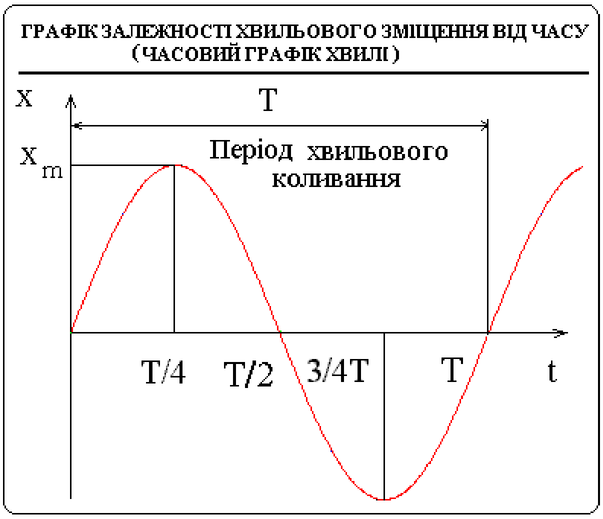
*Г.м.т., до яких дійшла хвиля в даний момент часу, називається **фронтом хвилі**.*

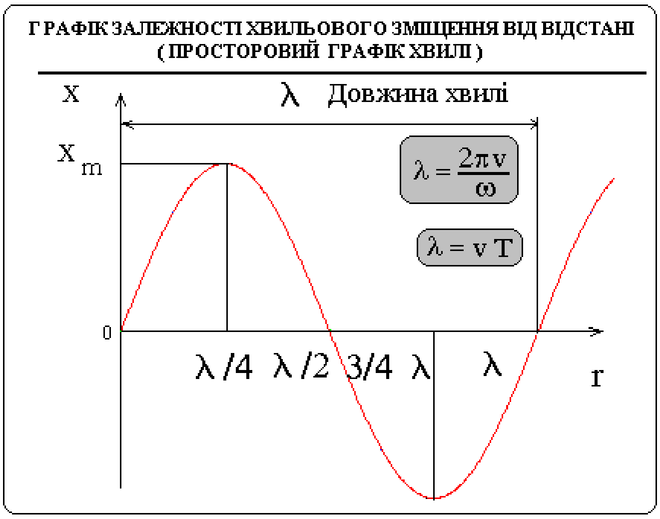
Хвиля характеризується графіком залежності коливного зміщення даної точки хвильового поля від часу (графіком хвильового коливання) та графіком залежності коливного зміщення точок хвильового поля від відстані до джерела в даний момент часу.

Можна записати ***рівняння зміщення хвилі***, яка поширюється в напрямку осі $\vec{r}$. Це *рівняння визначає коливне зміщення в довільній точці хвильового простору (хвильового поля) в будь - який момент часу* і виражає те, що зміщення в даній точці і момент часу x (r, t) таке, як в ближчій до джерела початковій точці, в більш ранній момент часу, зменшений на час, потрібний для надходження хвилі в дану точку ($t_0 = \frac{r}{v}$), тобто

$$x(r,t) = x(0, t - t_0) = x(0, t - \frac{r}{v}) .$$

У випадку поширення гармонійного коливання рівняння хвильового зміщення (рівняння





плаской хвилі) запишеться

$$x = x_m \cos \omega (t - \frac{r}{v}) .$$

Рівняння плаской хвилі, яка поширюється в протилежному напрямку осі у відповідності до попередніх міркувань запишеться так:

$$x = x_m \cos \omega (t + \frac{r}{v}) .$$

Проекція зміщення точок (x) на відстані довжини хвилі ($r = \lambda$) повторюється, тому з рівняння хвилі, з врахуванням періодичності гармонійної функції,

$$\frac{\omega \cdot \lambda}{v} = 2\pi .$$

Отже

$$\lambda = \frac{2\pi \cdot v}{\omega} = \frac{2\pi \cdot vT}{2\pi} = vT ,$$

у відповідності до означення.

Рівняння фронту хвилі (хвильової поверхні) запишеться:

$$x(0, t - \frac{r}{v}) = const \text{, або } t - \frac{r}{v} = const \text{,}$$

звідки можна знайти швидкість поширення фронту (***фазову швидкість***), яка входить в рівняння хвилі.

$$v = \frac{r}{t}.$$

Рівняння сферичної хвилі*

Фронт хвилі точкового джерела є сферичним.

При написанні *рівняння хвильового зміщення сферичної хвилі* слід врахувати зменшення амплітуди коливань в точках хвилі по мірі їх віддалення від джерела

Нехай амплітуда коливань джерела A, енергія коливань W. При поширенні сферичного фронту ця енергія розподіляється по його поверхні радіусом r, площею $S = 4\pi r^2$. Поверхнева густина енергії $\varepsilon_s = \frac{W}{S}$, як і енергія коливання, буде прямо пропорційною квадрату амплітуди $\varepsilon_s = const\ A^2$. Якщо нехтувати затуханням, енергія віддаленого фронту радіусом r буде рівна початковій. Тому $\varepsilon_s\, 4\pi r^2 = W$, або $const\ A_r^{\ 2}.\ 4\pi r^2 = const\ A_0^{\ 2}$
Тобто амплітуда коливань зменшується обеpенопропорційно до радіуса фронту, або відстані r точки хвилі від джерела. Рівняння хвильового зміщення для сферичної хвилі запишеться

$$x = \frac{A}{r}\sin\omega\,(t - \frac{r}{v}).$$

Диференціальне рівняння хвилі (для знайомих з основами диференціального числення)

Оскільки рівняння хвильового зміщення теж називають рівнянням хвилі, то рівняння, яке отримаємо нижче, будемо далі називати диференціальним рівнянням хвилі. Рівняння хвильового зміщення в напрямку осі 0у, при поширенні хвилі в напрямку осі 0х матиме вигляд:

$$y = y_m \cos\omega\,(t - \frac{x}{v}).$$

Друга похідна зміщення по часу

$$y_t^{\parallel} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y$$

Друга похідна зміщення по координаті

$$y_x^{\parallel} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{v^2}\,y.$$

Рівняння, яке пов'язує другі похідні хвильового зміщення по часу та координаті, є диференціальним рівнянням хвилі. $y_t^{\parallel} = v^2 y_x^{\parallel}$, або $\frac{\partial^2 y}{\partial \cdot t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

3. Поширення хвиль в пружному середовищі. Звукові хвилі.

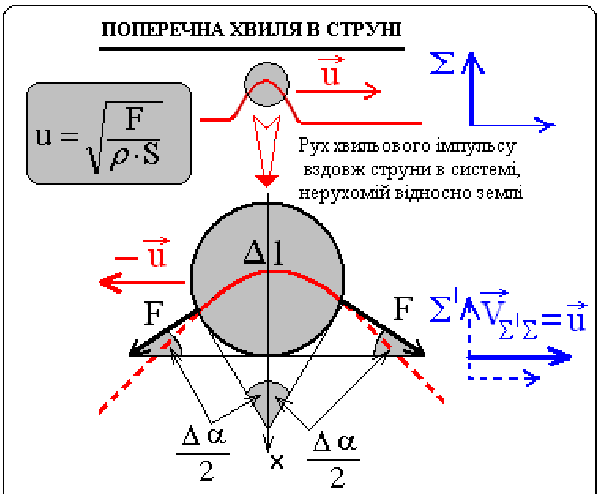
*3.1. Поперечні хвилі в струні**

Якщо збудити коливання струни поперечним зміщенням її (наприклад відхиливши та відпустивши), то вздовж струни поширюватиметься поперечна хвиля з деякою швидкістю u в системі Σ нерухомій відносно землі

Якщо розглянути хвилю в системі $\Sigma^{|}$, яка рухається відносно попередньої системи зі швидкістю хвилі, то в цій системі хвиля буде нерухомою, а речовина струни буде рухатися в протилежному напрямку з швидкістю u.

Можна вважати, що достатньо малий елемент струни Δl, який знаходиться на гребні хвилі, рухається по колу радіуса R зі швидкістю u і нормальним прискоренням

$$a_n = \frac{u^2}{R}.$$



Рух елемента струни в системі, що рухається зі швидкістю хвилі відносно попередньої системи

Це прискорення надається двома дотичними силами натягу струни F.

За другим законом Ньютона для елемента Δl масою $m = \rho \cdot S \Delta l$ (ρ- густина речовини струни, S –площа її перерізу) в проекціях на радіальний напрям матимемо:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = m a_x .$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 2F\sin\frac{\Delta\alpha}{2} \approx 2F\frac{\Delta\alpha}{2} = F\frac{\Delta l}{R} =,$$

так як синус малого кута рівний куту в радіанах.

$$a_x = a_n = \frac{u^2}{R},$$

Отже, після підстановки проекцій, матимемо :

$$F\frac{\Delta l}{R} = \rho \cdot S \Delta l \frac{u^2}{R},$$

звідки після скорочень

$$u = \sqrt{\frac{F}{\rho \cdot S}}.$$

*3.2.Поздовжні хвилі в пружному середовищі**

Поздовжня хвиля в пружному середовищі поширюється в напрямку ударного імпульсу сили $F\Delta t$ зі швидкістю u.

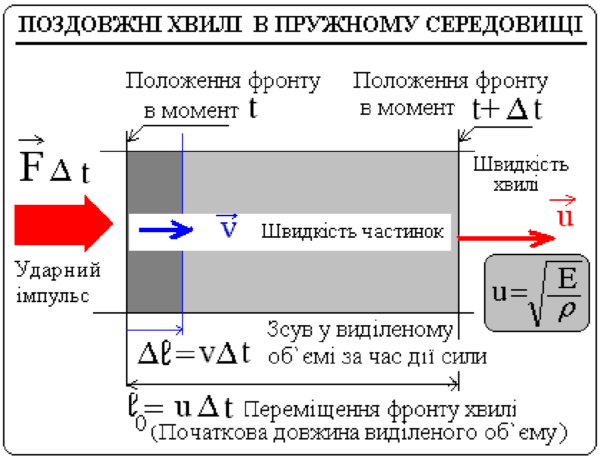
За час дії сила надає частинкам середньої швидкості v і викличе деформаційне зміщення в шарі речовини величиною $v\Delta t$. В коливання прийдуть частинки шару речовини товщиною

$u\,\Delta t$.

Всі частинки вказаного об'єму набудуть швидкості v. За другим законом Ньютона для цього об'єму:

$$F = ma = \rho \cdot S u \Delta u \frac{v}{\Delta t}.$$

За законом Гука



$$\frac{F}{S} = E\frac{|\Delta l|}{l_0},$$

де $\Delta l = v\Delta t$, $l_0 = u\Delta t$.

Після підстановки матимемо:

$$\rho \cdot uv = E\frac{v\,\Delta t}{u\,\Delta t},$$

звідки

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Можна порівняти швидкості поперечних (u_+) та поздовжніх хвиль ($u_=$).

$$u_+ = \sqrt{\frac{F}{\rho \cdot S}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = \sqrt{\frac{E\varepsilon}{\rho}};\ u_= = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Так як $\varepsilon << 1$, то $u_+ << u$.

*3.3. Енергія та густина енергії хвилі. Потужність хвилі**

В напрямку поширення механічної хвилі (напрямку ***променю***) від частинки до частинки середовища передається кінетична енергія коливання. Знайдемо потік енергії, що надходить зі швидкістю хвилі u від точкового джерела, розташованого на відстані r, через поверхню площею S за час Δ t.

Ця енергія буде зосереджена в об`ємі $V = S\Delta r = Su\Delta t$.

Якщо цей об'єм містить N частинок з середньою кінетичною енергією $\bar{\varepsilon}_k$ при концентрації n ,то їх енергія становитиме $W = N\bar{\varepsilon}_k = nV\bar{\varepsilon}_k$ Так як середнє значення квадрата гармонійної функції рівне 0,5, то середня кінетична енергія частинки середовища масою m_0 , яка коливається з циклічною частотою ω і амплітудою x_m , дорівнюватиме

$$\bar{\varepsilon}_k = 0{,}25 m_0 \omega^2 x_m^2 \ ,$$

Енергія, що проходить через приймальну поверхню

$$W = 0{,}25 N m_0 \omega^2 x_m^2 = 0{,}25 n V m_0 \omega^2 x_m^2 .$$

Так як $nm_0 = \rho$ - густина хвильового середовища ,то

$$W = 0{,}25\rho \cdot V\omega^2 x_m^2 .$$

Отже густина хвильової енергії, що випромінюється джерелом

$$w = \frac{W}{V} = 0{,}25\,\rho\,\omega^2 x_m^2$$

Потужність випромінювання

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{0{,}25\rho \cdot Su\,\Delta t\,\omega^2 x_m^2}{\Delta t} = 0{,}25\rho \cdot Su\omega^2 x_m^2$$

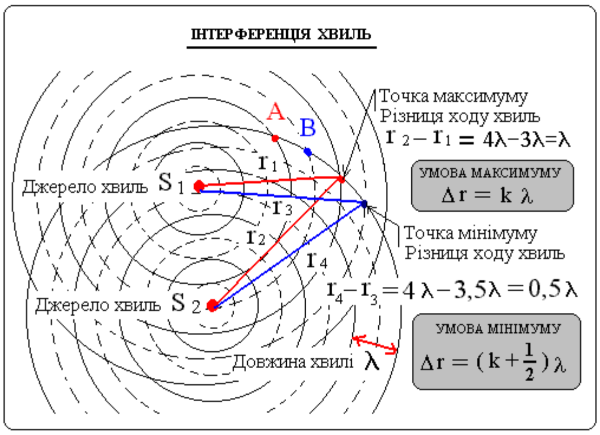
Поверхнева густина потужності випромінювання

$$p = 0{,}25\rho \cdot u\omega^2 x_m^2 .$$

3.4. Інтерференція хвиль

Якщо в середовищі одночасно поширюються декілька хвиль, то кожна з них здійснює самостійну дію на частинки середовища. В результаті частинка приймає участь у декількох коливаннях одночасно, інакше кажучи, коливне зміщення частинки є сумою зміщень викликаних кожною хвилею окремо. *Твердження про незалежне розповсюдження хвиль в одному середовищі, в результаті якого зміщення в кожній точці є*
сумою зміщень змушених кожною хвилею окремо, становить зміст ***принципу суперпозиції хвиль***. *Додавання хвильових коливань, в результаті якого в кожній точці хвильового поля встановлюється власна амплітуда коливань називається* ***інтерференцією.*** Розглянемо інтерференцію двох ***когерентних хвиль***, *тобто хвиль однакової частоти (хвильової довжини) та постійної в часі різниці фаз.* Зобразимо колові хвильові поверхні двох точкових джерел хвиль
(подібно до хвиль на поверхні води). Суцільною лінією зображені амплітудні зміщення обраного напрямку, пунктиром - протилежного.

Помітно, що існують точки, в яких хвилі змушують амплітудні зміщення одного напрямку, та точки де такі зміщення протилежні. Очевидно перші точки будуть коливатись з максимальною амплітудою, другі – з мінімальною. У випадку хвиль однакової амплітуди в останніх точках спостерігатиметься взаємопогашення хвильових коливань.



Точки з максимальною амплітудою коливань називаються ***точками максимуму***, точки з мінімальною амплітудою – ***точками мінімуму***. З малюнка випливає, що *максимальна амплітуда в тих точках, для яких різниця ходу хвиль (різниця відстаней до джерела) рівна цілому числу довжин хвилі* $\Delta r = k\lambda (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ *-**умова максимуму***.

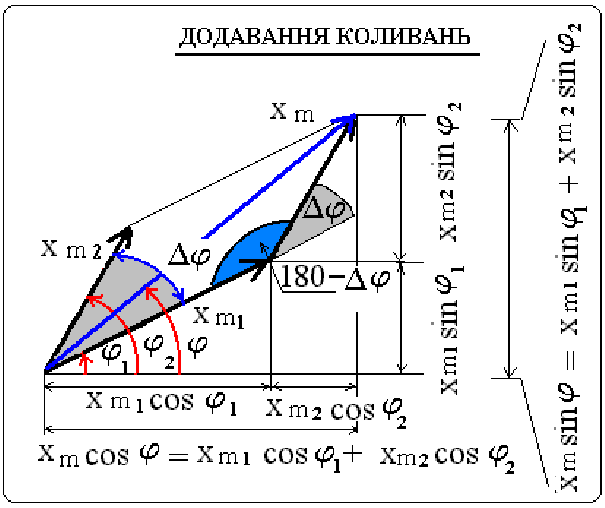
Мінімальна амплітуда в тих точках, для яких різниця ходу хвиль рівна цілому з половиною довжин хвилі:

$\Delta r = (k + \frac{1}{2})\lambda$ *- **умова мінімуму***.

Для математичного розрахунку інтерференції можна використати метод векторних діаграм. За цим методом кожна хвиля, як гармонійно змінна величина, зобразиться проекцією вектора з довжиною рівною амплітуді, і кутом нахилу до осі рівним фазі.

Зображуючий вектор результуючої хвилі буде рівний сумі зображуючих векторів складових (інтерферуючих) хвиль.

З малюнка видно, що для фази результуючої хвилі виконується



$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{x_{m1}\sin\varphi_1 + x_{m2}\sin\varphi_2}{x_{m1}\cos\varphi_1 + x_{m2}\cos\varphi_2}$$

Амплітуду результуючої хвилі можна знайти за теоремою косинусів.

$$x_m^2 = x_{m1}^2 + x_{m2}^2 - 2x_{m1}x_{m2}\cos(180^0 - \Delta\varphi) = x_{m1}^2 + x_{m2}^2 + 2x_{m1}x_{m2}\cos\Delta\varphi$$

З останнього випливає умова максимальної результуючої амплітуди :

$\Delta\varphi = k2\pi \ \ (k \in \mathbf{Z})$, так як $\Delta\varphi = \omega\Delta t = \dfrac{\omega\Delta r}{v} = \dfrac{2\pi\Delta r}{vT} = \dfrac{2\pi\Delta r}{\lambda}$,

то

$$\frac{2\pi\Delta r}{\lambda} = k2\pi,$$

звідки отримуємо умову максимуму

$$\Delta r = k\lambda$$

Аналогічно, умова мінімальної амплітуди :

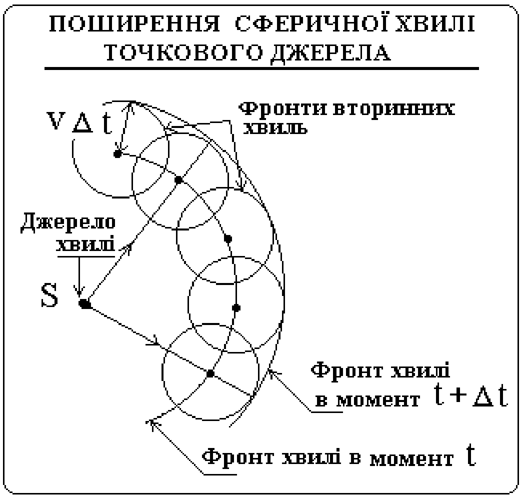
$$\Delta\varphi = (k + \frac{1}{2})2\pi$$

і

$$\Delta r = (k + \frac{1}{2})\lambda.$$

3.5. Принцип Гюйгенса – Френеля *

Цей принцип дозволяє пояснити особливості поширення хвиль при наявності граничних умов. З спостережень відомо, що при падінні хвилі на межу розділу двох середовищ, хвиля частково, або повністю, повертається в попереднє середовище, відбувається її ***відбивання***. У випадку переходу хвилі в інше, прозоре для хвилі середовище, напрямок її поширення змінюється – спостерігається ***заломлення*** хвилі. В численних випадках спостерігається явище ***дифракції***, яке полягає у відхилення хвилі від прямолінійності поширення, заходження в область геометричної тіні, огинання предметів з розмірами порівняними з довжиною хвилі.



Принцип підходу до пояснення цих явищ, характерних для хвиль будь-якої природи, в тому числі і для електромагнітних, зокрема світлових, були викладені Гюйгенсом в творі « Трактат про світло » (1690 р.).

Цей принцип стверджує, що кожна точка, до якої дійшла хвиля в даний момент часу, може розглядатись, як самостійне джерело таких же вторинних хвиль. Фронт первинної хвилі є огинаючою (дотичною) поверхнею фронтів всіх вторинних хвиль.
Французький вчений Френель доповнив початкову форму принципу Гюйгенса положенням про інтерференцію вторинних хвиль та запропонував метод поділу фронту хвилі на зони, що нині називаються «зонами Френзеля».

Пояснення прямолінійності поширення хвилі *

Розглянемо сферичний фронт хвилі від точкового джерела S в точці спостереження O.
Розіб'ємо фронт хвилі на кільцеві зони Френеля колами, відстань яких від точки спостереження зростає на півхвилі по мірі віддалення від напрямку на джерело.
Згідно Френелю хвиля в точці спостереження – це результат інтерференції всіх вторинних хвиль від зон. Так як різниця ходу хвиль від сусідніх зон відрізняється на півхвилі, то амплітуда коливань A в точці спостереження в результаті інтерференції буде
$A = A_0 - A_2 + A_3 - \cdots \pm A_n$, де середні амплітуди коливань сусідніх зон беруться з протилежним знаком, так як вторинні хвилі від цих зон приходять в протилежних фазах.

Амплітуда хвильових коливань будь-якої зони наближено рівна середньому арифметичному амплітуд сусідніх зон.

$$A_k = \frac{A_{k-1} + A_{k+1}}{2} = \frac{A_{k-1}}{2} + \frac{A_{k+1}}{2}.$$

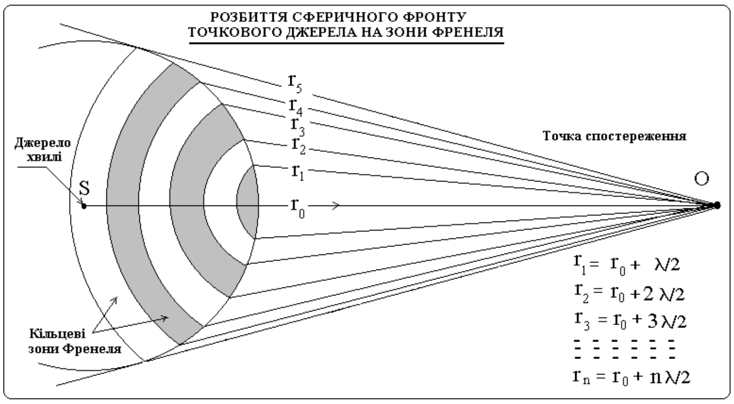
Розпишемо амплітуди з парним номером, як суму двох половин

$$A = \frac{A_0}{2} + (\frac{A_0}{2} - A_1 + \frac{A_2}{2}) + (\frac{A_2}{2} - A_3 + \frac{A_4}{2}) + \cdots + A_n .$$

Так як $A_1 = \frac{A_0}{2} + \frac{A_2}{2}; A_3 = \frac{A_2}{2} + \frac{A_4}{2}$ і т. д, вирази в дужках будуть рівні нулю.

Нехтуючи останнім доданком можна записати

$$A \approx \frac{A_0}{2}.$$



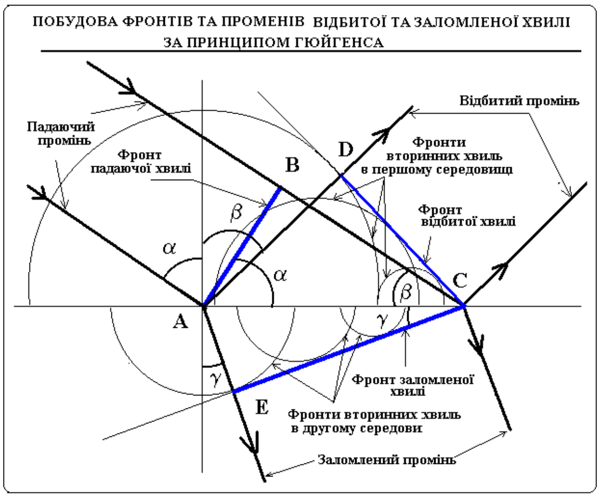
Тобто енергія хвилі вданій точці визначається половиною середньої амплітуди коливань центральної зони, розмір якої порівняний з довжиною хвилі, що і означає прямолінійність поширення.

Саме завдяки інтерференції зон, точкове джерело світла спостерігається світною точеою, а не сферою.

Відбивання та заломлення хвилі*

Розглянемо дільницю АВ плоского фронту хвилі обмежену двома променями при падінні хвилі на площину, що розділяє два середовища з швидкостями хвилі v_1 та

$v_2 < v_1$. (У випадку світлової хвилі середовище з меншою швидкістю світла називається більш оптично густим.)



Щоб знайти фронт відбитої та заломленої хвилі, побудуємо фронти вторинних хвиль від точок відрізка АС з моменту надходження первинної хвилі в точку А до моменту її надходження в точку С,. Радіус вторинної хвилі, що поширюється від точки А в перше середовище рівний $v_1 \Delta t$, в друге $v_2 \Delta t$, де Δt - час поширення хвилі з точки В до точки С. Легко впевнитись, що радіуси вторинних хвиль від точки А до точки С зменшуються до 0. Огинаючі (дотичні) поверхні до вторинних фронтів в першому та другому середовищі, утворять фронти відбитої (CD) та заломленої (CE) хвилі, перпендикулярами до яких служитимуть відбитий (AD) та заломлений (AE) промені.

Щоб пов'язати кут падіння α з кутом відбивання β та заломлення γ, розглянемо спочатку трикутники ACB та ACD. Так як в цих прямокутних трикутниках з спільною гіпотенузою AC є рівні катети $AD = BC = v_1\Delta t$, то ці трикутники рівні. З рівності трикутників випливає рівність кутів $ACD = \alpha$ та $BAC = \beta$, тобто рівність кутів падіння та відбивання.

Розглянувши прямокутні трикутники ACB та ACE зі спільною гіпотенузою

$$AC = \frac{AD}{\sin\alpha} = \frac{v_1\,\Delta t}{\sin\alpha} = \frac{AE}{\sin\gamma} = \frac{v_2\,\Delta t}{\sin\gamma}\ ,$$

матимемо співвідношення між кутами падіння та заломлення.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{v_1}{v_2} = n_{2,1}.$$

На основі розглянутого можна сформулювати ***закони відбивання хвилі***, в тому числі і світлової:

1) промінь падаючий, відбитий та перпендикуляр до відбиваючої поверхні, встановлений в точці падіння, лежать в одній площині;

2) кут падіння променя дорівнює кутові його відбивання.

$$\alpha = \beta\,.$$

Закони заломлення стверджують, що:

1) промінь падаючий, заломлений та перпендикуляр до поверхні розділу середовищ лежать в одній площині;

2) відношення синуса кута падіння до синуса кута відбивання променя для двох даних середовищ є величина стала, рівна відношенню швидкості світла в першому середовищі до швидкості світла в другому середовищі, і називається показником заломлення другого середовища відносно першого.

*3.6. Стояча хвиля**

При падінні хвилі на межу розділу двох середовищ відбувається її відбивання від цієї межі. Пряма і відбита хвиля можуть інтерферувати. Якщо амплітуди прямої та відбитої хвилі рівні, то *результатом інтерференції прямої і відбитої хвилі є* ***стояча хвиля.*** Для розрахунку інтерференції *відлік ходу прямої і відбитої хвилі зручно проводити від відбиваючої поверхні.*

Рівняння прямої хвилі

$$x_1 = x_m \cos(\omega \cdot t + \frac{\omega \cdot r}{v}).$$

Рівняння відбитої хвилі, яка поширюється в протилежному напрямку, відрізняється протилежним знаком перед r і може мати додаткову фазу, яка визначається крайовими умовами – коливним зміщенням на поверхні відбивання.

$$x_2 = x_m \cos(\omega \cdot t - \frac{\omega \cdot r}{v} + \varphi).$$

Зміщення результуючої хвилі буде рівне сумі зміщень прямої і відбитої хвилі.

$$x = x_1 + x_2.$$

Для знаходження додаткової фази відбитої хвилі врахуємо, що на поверхні відбивання (r = 0) результуюче зміщення рівне нулю.

$$\cos(\omega \cdot t) = -\cos(\omega \cdot t + \varphi),$$

Звідси випливає, що $\varphi = \pi$

Отже $x_2 = x_m \cos(\omega \cdot t - \frac{\omega \cdot r}{v} + \pi) = -x_m \cos(\omega \cdot t - \frac{\omega \cdot r}{v})$.

Результат інтерференції цих хвиль знаходиться за формулою суми косинусів

$$x = x_1 + x_2 = x_m 2 \cos \frac{\omega \cdot r}{v} \cos \omega \cdot t.$$

Отримали хвилю, амплітуда якої

$$A = 2x_m \cos \frac{\omega \cdot r}{v}.$$

Остання формула показує, що існують *точки, де амплітуда коливань рівна нулю –* ***вузли*** *і точки де амплітуда коливань подвоюється –* ***пучності****.*

Умова вузлів

$$\frac{\omega \cdot r}{v} = (k + 0,5)\pi \quad (k \in \mathbf{Z}),$$

$$r = (k + 0,5)\frac{\pi \cdot v}{\omega} = (k + 0,5)\frac{\lambda}{2}.$$

Отже відстань між сусідніми вузлами $\frac{\lambda}{2}$.

Очевидно, що такою ж є відстань між пучностями.